LOI BINOMIALE – LOI GÉOMÉTRIQUE

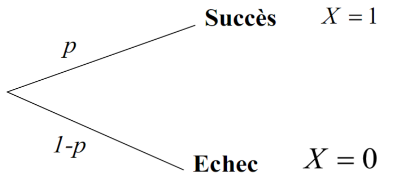
I – Épreuve de Bernoulli

A – Épreuve de Bernoulli:

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne possédant que deux issues possibles (souvent appelées Succès et Échec).

La variable aléatoire discrète X prend la valeurs 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès

Un arbre permet une description complète de l'expérience :

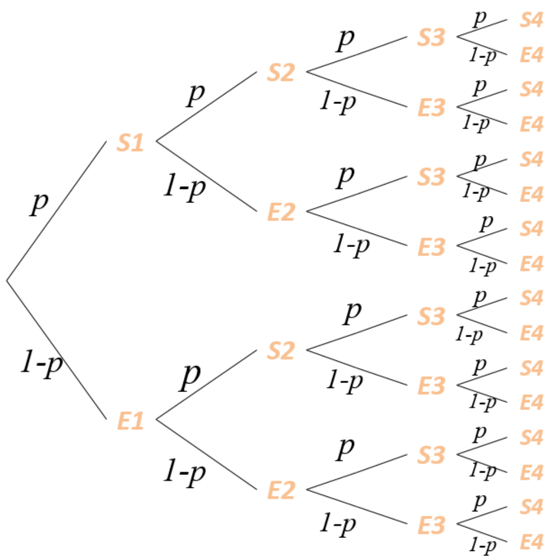


Exemple: Sophie est née un 30 mai. Elle interroge une personne choisie au hasard pour connaître le jour de son anniversaire.

II - Loi Binomiale :

A -Schéma Binomial

On répète n fois la même épreuve de Bernoulli (même probabilité de succès p), de *façon indépendante.*



IUT Le Mans
Le Mans Université
Gestion des Entreprises & des Administrations
Probabilités

B -Loi de probabilité

On se place dans le cadre d'un schéma binomial :

On compte X le nombre total de succès obtenus à l'issue de cette expérience

Les valeurs possibles de X sont : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots.. n.$

$(X = k)$ se lit *« on a obtenu k succès à l'issue des n épreuves »*

La probabilité associée à la valeur k (k entier compris entre 0 et n) est donnée par :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Probabilité d'obtenir k succès à l'issue de n épreuves

La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et est notée : $\mathcal{B}(n\,;p)$

Remarque : la somme des probabilités vaut 1

Notation : $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments parmi n

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

C – Espérance, Variance :

On admet que : $E(X) = n \times p \quad et \quad V(X) = n \times p \times (1-p)$

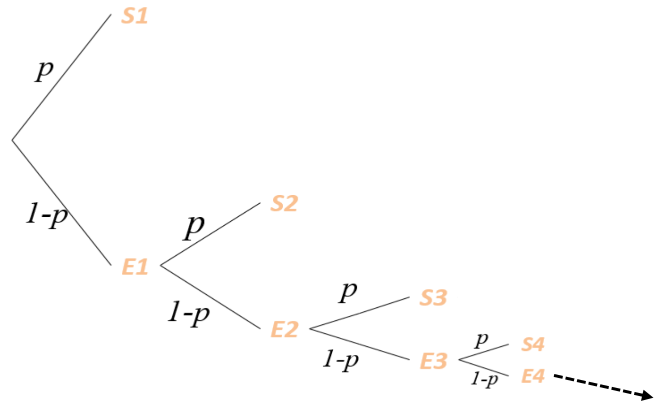
D – Exemples:

Sophie est née un 30 mai. Elle interroge 365 personnes choisies au hasard et de manière indépendante pour connaître le jour de leur anniversaire. Chaque personne est supposée avoir son anniversaire de façon équiprobable l'un des 365 jours de l'année.

III - Loi géométrique

A – Expérience aléatoire :

On répète une même épreuve de Bernoulli de *façon indépendante*, jusqu'à obtenir un premier succès



B -Loi de probabilité

La variable aléatoire X donne le nombre de répétitions nécessaires

Les valeurs possibles de X sont : *1 ; 2 ; 3 ; 4 .....(toutes valeurs entières non nulles)*

$(X = k)$ se lit *« le premier succès est obtenu à l'issue de la $k^{ième}$ épreuve »*

La probabilité associée à la valeur k (k entier supérieur ou égal à 1) est donnée par :

$$p(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$$

Probabilité d'obtenir le premier succès à l'issue de la $k^{ième}$ épreuve

La loi de probabilité de X est appelée loi géométrique de paramètre p et est notée : $\mathcal{G}(p)$

Remarque : la somme (…infinie) des probabilités vaut 1.

C – Espérance, Variance :

On admet que : $E(X) = \frac{1}{p}$ et $\quad V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$

EXERCICES

Exercice 1

X désigne une variable aléatoire discrète.

1. Dans cette question X~ $\mathcal{B}$(3 ; 0,2) : présenter cette loi sous forme de tableau.
   Préciser l'espérance ~~et la variance~~ de X.

$X=k$	0	1	2	3
$p(X=k)$	$0{,}8^3 = 0{,}512$	$\binom{3}{1} \times 0{,}2^1 \times 0{,}8^2$ 0,384	$\binom{3}{2} \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^1$ 0,096	$0{,}2^3 = 0{,}008$

$$\boldsymbol{E(X) = 3 \times 0,2 = 0,6 \quad et \quad V(X) = 3 \times 0,2 \times 0,8 = 0,48}$$

2. Dans cette question X~ $\mathcal{G}$(0,6) : présenter cette loi sous forme de tableau.

$X=k$	1	2	3	.....tableau « infini »....
$p(X=k)$	$0{,}6 \times 0{,}4^0 = 0{,}6$	$0{,}6 \times 0{,}4^1$ 0,24	$0{,}6 \times 0{,}4^2$ 0,096	… … … … ..

3. Dans cette question X~ $\mathcal{B}$(8 ; 0,7) : calculer $p(X=5)$, $p(X > 1)$et $p(X=10)$.

$$p(X=5) = \binom{8}{5} \times 0{,}7^5 \times 0{,}3^3 \approx 0{,}2541$$

$$p(X > 1) = 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - 0{,}3^8 - 8 \times 0{,}7 \times 0{,}3^7 \approx 0{,}9987$$

$$p(X=10) = 0 \text{ car } 10 > 8$$

IUT Le Mans
Le Mans Université
Gestion des Entreprises & des Administrations
Probabilités

Exercice 2

Un organisme de financement participatif vous propose, via une plateforme internet d'investir dans des start-up en leur accordant un prêt sur un an.

La somme prêtée à la start-up vous sera rendue avec 15% d'intérêts si l'entreprise réussit son développement mais sera perdue si l'entreprise est amenée à disparaitre.

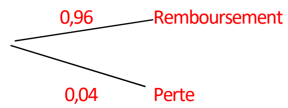
Une sélection rigoureuse des projets permet à la plateforme d'annoncer sur son site : « 96% des prêts sont remboursés avec intérêts »

Vous décidez donc de prêter (sur un an) une même somme d'argent (100 €) à 80 entreprises considérées comme indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entreprises incapables de vous rembourser au bout d'un an.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

- Chaque entreprise peut être associée à une épreuve de Bernoulli



- Cette épreuve est répétée 80 fois de façon indépendante
- X est la variable aléatoire donnant le nombre d'entreprises incapables de vous rembourser au bout d'un an.

X~ $\mathcal{B}$(80 ; 0,04)

Déterminer en fonction de X, une expression du bénéfice obtenu.

$$B = 115 \times (80 - X) - 80\,000 \text{ soit } B = 1\,200 - 115X$$

En déduire la probabilité d'obtenir un bénéfice d'au moins 750 €

$$B \geq 750 \; donne \; 1\,200 - 115X \geq 750$$

$$\text{puis } X \leq 3{,}91$$

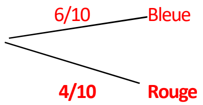
$$\text{Ainsi } p(B \geq 750) = p(X \leq 3{,}91) = p(X \leq 3)$$

Exercice 4

Une urne contient six balles Bleues, quatre balles Rouges. On prélève les balles successivement et avec remise jusqu'à obtenir la couleur rouge. On note Y le nombre de tirages nécessaires et Z le nombre de balles bleues obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de Y., exprimer la relation entre Y et Z et calculer *p(Z = 7)*

- Chaque tirage peut être associé à une épreuve de Bernoulli



- Cette épreuve est répétée de façon indépendante **jusqu'à obtenir une balle rouge**
- Y est la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires :

  $$Y \sim \mathcal{G}(0{,}4)$$

  On a Z=Y-1 (seul le dernier tirage donne une balle rouge, tous les autres donnent une balles bleues)

  $$\boldsymbol{p(Z=7)=p(Y=8)=0{,}4\times 0{,}6^{7}\approx 0{,}0112}$$

IUT Le Mans
Le Mans Université
Gestion des Entreprises & des Administrations
Probabilités

Exercice 5

Un entrepôt dispose de cinq quais de déchargement pour les livraisons. Les déchargements peuvent s'effectuer 24h/24 et sont considérés comme indépendants

Pour chaque quai, on constate en moyenne 36 livraisons par jour (et 30 minutes par déchargement).

1. Un camion arrive à l'entrepôt : quelle est la probabilité qu'un quai de déchargement soit disponible.

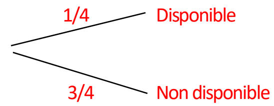
   Sur 24h, un quai sera utilisé $36 \times 1/2h = 18\ heures$

   Donc reste 6h où le quai est disponible

   Probabilité que le quai soit disponible : $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

2. Quatre camions arrivent au même moment : quelle est la probabilité qu'au moins un camion ne puisse pas accéder à un quai.

Chaque quai peut être associé à une épreuve de Bernoulli



Cette épreuve est répétée 5 fois de façon indépendante

En notant X le nombre de quais disponibles à l'arrivée des camions,

X suit une loi binomiale $\boldsymbol{B(5\,;\frac{1}{4})}$

L'évènement « au moins un camion ne peut pas accéder à un quai » correspond à $(X \leq 3)$

$$p(X \leq 3) = 1 - p(X=4) - p(X=5) = 1 - \left(\binom{5}{4} \times 0{,}25^4 \times 0{,}75\right) - 0{,}25^5$$

$$soit\ p(X \leq 3) \approx 0{,}9844$$

3. En moyenne, quel est le nombre de quais disponibles quand un camion arrive.

$$\boldsymbol{E(X) = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25}$$